ISTITUTO LOMBARDO
ACCADEMIA DI SCIENZE E LETTERE

RENDICONTI

Scienze Matematiche e Applicazioni

A

Vol. 122 (1988)

ESTRATTO

CARLO FELICE MANARA

VARIAZIONI DI AUTOVETTORI DELLE MATRICI LEONTIEVIANE

Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
1989

Geometria *Istituto Lombardo (Rend. Sc.)* A 122, *3-17 (1988)*

VARIAZIONI DI AUTOVETTORI DELLE MATRICI LEONTIEVIANE

Nota del m. e. CARLO FELICE MANARA

(Adunanza del 28 gennaio 1988)

SUMMARY. — Variations of some eigenvectors of Leontief matrices are analyzed. The proofs are developed in geometric form; nevertheless, this does not hinder the interpretation of the results in Economics.

§ 1. - La presente Nota è dedicata all'analisi ed allo studio del comportamento di certi autovettori delle matrici leontieviane al variare di certi elementi caratteristici delle matrici stesse.

Le proprietà che saranno messe in luce nelle pagine seguenti saranno espresse in forma geometrica; tuttavia i problemi che hanno portato alla loro dimostrazione hanno avuto la loro origine in questioni di Analisi economica. La forma geometrica in cui presentiamo i risultati permette di intravvedere la possibilità della loro applicazione anche in ambiti più vasti di quelli che hanno dato origine alla presente ricerca.

Sia M una matrice quadrata di ordine $(n+1)$, i cui elementi sono numeri reali non negativi.

Supporremo che la matrice M, oltre alla ipotesi di non-negatività ora enunciata, soddisfi anche alle ipotesi seguenti:

i) sia indecomponibile;

ii) la somma degli elementi di ogni colonna sia minore di 1.

Una matrice che soddisfi a tutte le condizioni enunciate sarà chiamata nel seguito brevemente "matrice leontieviana indecomponibile".

È noto che da queste ipotesi si deducono per la matrice M varie proprietà, tra le quali ricordiamo le seguenti, che ci occorrerà di utilizzare nel seguito.

Si consideri la equazione caratteristica della matrice M, equazione data da:

$$|tI - M| = 0 .$$

Valgono allora le seguenti proprietà:

a) esiste un numero reale λ soddisfacente alla equazione caratteristica ed alle limitazioni:

$$0 < \lambda < 1 ; \tag{1}$$

b) λ è radice semplice della equazione caratteristica;

c) ogni altra radice della equazione caratteristica (reale o complessa) ha il suo modulo minore di λ;

d) l'autovettore x della matrice M che corrisponde alla radice λ ha tutte le sue componenti non nulle e del medesimo segno; ciò può anche essere espresso dicendo che esiste un autovettore x strettamente positivo, corrispondente alla radice λ della equazione caratteristica, che soddisfa alla equazione vettoriale:

$$Mx = \lambda x ; \tag{2}$$

e) considerato un qualunque numero reale β maggiore di λ, tale cioè che sia:

$$\beta > \lambda , \tag{3}$$

la matrice

(4) $$(\beta I - M)^{-1}$$

ha tutti i suoi elementi positivi. Per brevità, diremo convenzionalmente che la radice λ della equazione caratteristica che gode di queste proprietà è "l'autovalore di Frobenius" della matrice M.

f) Considerata una qualunque sottomatrice quadrata della M, essa ha un autovalore di Frobenius minore di λ.

§ 2. - Per comodità, indicheremo gli elementi della matrice M considerata con le notazioni della seguente tabella:

(7) $$M = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

In forma convenzionale più compatta, scriveremo:

(7) $$M = \left[\begin{array}{c|c} b_0 & b' \\ \hline c & A \end{array}\right] .$$

In questa notazione, b_0 è ovviamente un numero, b e c sono vettori ad n componenti, A è una matrice quadrata di ordine n.

Indicheremo con le ultime lettere dell'alfabeto latino: x, y, z, ... dei vettori appartenenti allo spazio vettoriale ad $(n+1)$ dimensioni. I numeri reali che sono componenti di un vettore cosiffatto saranno indicati con notazioni analoghe alla seguente:

(7) $$x' = [x_0, x_1, \ldots, x_n] .$$

Nel seguito supporremo che i vettori che prenderemo in considerazione abbiano le componenti non negative; in particolare supporremo che si abbia, per ogni vettore x:

$$x_0 > 0 . \tag{8}$$

Di conseguenza indicheremo con la stessa lettera ma in carattere maiuscolo e con un asterisco, il vettore che è proporzionale ad x ed ha come primo elemento 1. Porremo cioè:

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} = x\,(1/x_0) . \tag{8}$$

Diremo convenzionalmente che il vettore X^* è stato ottenuto dal vettore x con una operazione di "normalizzazione" oppure anche che X^* è il vettore "normalizzato" di x. Il vettore ad n componenti, che ha come componenti i numeri:

$$X_i = x_i \, / \, x_0 \, ; \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{9}$$

sarà indicato con il simbolo X, come è già stato fatto nella (8).

Utilizzando queste notazioni convenzionali, quando si abbia un vettore normalizzato X^*, si potrà scrivere:

$$y = MX^* = \begin{bmatrix} b_0 + b'X \\ c + AX \end{bmatrix} . \tag{10}$$

Osserviamo che, ovviamente, il vettore MX^* non è in generale normalizzato.

Per gli sviluppi che seguono, porremo convenzionalmente:

$$P\,(X^*) = b_0 + b'X = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i \tag{11}$$

$$P_0\,(X) = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i .$$

§ 3. - Supponiamo ora che il vettore X^* che figura nella (10) sia l'autovettore della matrice M che corrisponde alla radice di Frobenius λ della matrice M stessa. Si avrà quindi:

$$y = \lambda X^* \tag{12}$$

e quindi, in base alla (10) citata,

$$\begin{cases} P(X^*) = \lambda \\ c + AX = \lambda X . \end{cases} \tag{13}$$

Da queste relazioni si trae:

$$P(X^*) \cdot X = c + AX . \tag{14}$$

I risultati richiamati nel paragrafo precedente, relativi agli autovettori delle matrici leontieviane, possono essere riformulati ora, in forma del tutto equivalente, dicendo che il sistema di equazioni algebriche (non lineari) (14) ammette come soluzioni le componenti di un vettore positivo X.

Si consideri un parametro reale positivo α; poniamo ora:

$$\begin{cases} \bar{b}_i = b_i - \alpha \\ \bar{a}_{1i} = a_{1i} + \alpha . \end{cases} \tag{15}$$

Poniamo inoltre:

$$S(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i . \tag{16}$$

Indichiamo poi con il simbolo $\bar{b}$ il vettore b nel quale le componenti b_i sono state sostituite dalle $\bar{b}_i$ date dalle (15). In analogia con le

(11) poniamo inoltre

$$\bar{P}(X^*) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i X_i = P(X^*) - \alpha S(X) . \tag{17}$$

Indichiamo infine con il simbolo $\bar{A}$ la matrice quadrata di ordine n che si ottiene dalla A sostituendo nella prima riga gli elementi $\bar{a}_{1i}$ dati dalle (15), e poniamo infine:

$$\bar{M} = \left[\begin{array}{c|c} b_0 & \bar{b}' \\ \hline c & \bar{A} \end{array} \right] . \tag{18}$$

Ovviamente, per $\alpha = 0$ si ha

$$\begin{aligned} \bar{b}_i &= b_i \\ \bar{a}_{1i} &= a_{1i} \\ \bar{P}(X^*) &= P(X^*) \\ \bar{M} &= M . \end{aligned} \tag{19}$$

Gli enti che stiamo considerando (elementi, vettori, matrici) sono tutti ovviamente funzioni continue del parametro α. Esisterà quindi un numero reale positivo k tale che, quando si ha:

$$0 \leqslant \alpha < k \tag{20}$$

la matrice $\bar{M}$, funzione di α, è leontieviana ed indecomponibile, e possiede di conseguenza tutte le proprietà che sono state enumerate sopra per tali matrici.

Nel seguito supporremo in ogni caso che i valori del parametro α che prenderemo in considerazione appartengano all'insieme definito dalle (20).

Indichiamo ora con $Z(X)$ il vettore ad n componenti che ha la prima componente uguale ad $S(X)$ e nulle tutte le altre: poniamo cioè

(21) $$Z(X)' = [S(X), 0, ..., 0].$$

Con queste notazioni convenzionali si può scrivere brevemente:

(22) $$\bar{A}X = AX + \alpha Z(X).$$

§ **4.** - Sia ora $\bar{\lambda}$ l'autovalore di Frobenius della matrice $\bar{M}$, e sia $\bar{x}$ l'autovettore che gli corrisponde. Si avrà cioè:

(23) $$\bar{M}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}.$$

Analogamente a quanto abbiamo fatto nel paragrafo precedente, prenderemo in considerazione il sistema di equazioni algebriche (non lineari) equivalente al sistema (23), equazioni che, con le convenzioni sopra adottate, possono essere scritte nella forma:

(24) $$\bar{P}(\bar{X}^*)\bar{X} = c + \bar{A}\bar{X}.$$

In forza di noti teoremi sulle funzioni implicite, se valgono le ipotesi ammesse, il vettore strettamente positivo $\bar{X}$ può essere considerato come una funzione del parametro α, regolare almeno per valori opportunamente piccoli di α. Indichiamo ora con Y il vettore le cui componenti sono le derivate — calcolate per $\alpha = 0$ — delle componenti del vettore $\bar{X}$, considerate come funzione di α. Di conseguenza il vettore $\bar{X}$ le cui componenti sono soluzioni del sistema di equazioni algebriche (24) potrà essere rappresentato da una formula (di Taylor), nella forma:

(25) $$\bar{X} = X + \alpha Y + [2]$$

dove sono stati indicati con il simbolo [2] i termini della formula che sono di ordine di infinitesimo non inferiore a 2 rispetto alla variabile α, assunta come infinitesimo principale.

In forza delle definizioni stabilite, si avrà:

$$\bar{P}(\bar{X}^*) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \bar{X}_i = P(X^*) + \alpha P_0(Y) - \alpha S(X) + [2] \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{X} &= \bar{A}(X + \alpha Y + [2]) = A(X + \alpha Y + [2]) + \\ &+ \alpha Z(X + \alpha Y + [2]) = AX + \alpha AY + \alpha Z(X) + [2]. \end{aligned} \tag{27}$$

Tenendo conto della (14) del paragrafo precedente, e sostituendo nella (24) gli sviluppi ora dati, si ottiene che le componenti del vettore Y debbono soddisfare al sistema di equazioni seguenti:

$$[P(X^*) \cdot I_n - A]\, Y = Z(X) + X\,[S(X) - P_0(Y)]\,. \tag{28}$$

LEMMA 1. - *La matrice di ordine n:*

$$[P(X^*) \cdot I - A]^{-1} \tag{29}$$

è ad elementi positivi.

La dimostrazione si consegue ricordando le proprietà delle matrici leontieviane, richiamate nel paragrafo 1 e ricordando poi la prima delle (13) del paragrafo 3. Infatti in forza di quest'ultima $P(X^*)$ vale l'autovalore di Frobenius di M, autovalore che è certamente superiore a quello della matrice A, che è sottomatrice di M, come abbiamo ricordato.

Osserviamo ora che nella (23) abbiamo indicato con il simbolo $\bar{\lambda}$, l'autovalore di Frobenius della matrice $\bar{M}$. Dalle ipotesi enunciate siamo autorizzati a considerare tale autovalore come funzione implicita regolare della variabile α. Indicando, per brevità, con il simbolo:

$$\lambda' \tag{30}$$

il valore delle derivate della funzione $\bar{\lambda}$, calcolata per $\alpha = 0$, si avrà:

$$\bar{\lambda} = \lambda + \alpha\lambda' + [2]\,. \tag{31}$$

Dal confronto di questa formula con la (26) si avrà quindi:

$$\lambda' = P_0(Y) - S(X)\,. \tag{32}$$

Con queste notazioni, e tenendo presente la seconda delle (13) del paragrafo 3, la (28) potrà essere scritta nella forma:

$$[\lambda I_n - A]\, Y = Z(X) - \lambda' X\,. \tag{33}$$

Tenendo presente il Lemma 1, possiamo presentare a questo punto un primo risultato parziale, contenuto nell'enunciato del seguente:

LEMMA 2. - *Nel caso in cui si abbia*

$$\lambda' \leqslant 0 \tag{34}$$

la equazione vettoriale (33) *ammette come soluzione un vettore Y le cui componenti sono positive.*

Pertanto le componenti del vettore X sono crescenti per $\alpha = 0$, e rimangono crescenti almeno in un opportuno intorno del valore nullo del parametro α.

Il caso in cui l'ipotesi (34) non sia soddisfatta formerà oggetto degli sviluppi del prossimo paragrafo.

§ 5. - Discuteremo in questo paragrafo il segno delle componenti del vettore Y che è soluzione della (33) nel caso in cui la condizione (34) non è soddisfatta.

A tal fine porremo per brevità:

$$\lambda I_n - A = B\,. \tag{35}$$

Con questa posizione si avrà

$$B = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Indichiamo qui con i simboli

$$V_1, V_2, \ldots, V_n \tag{37}$$

i vettori che costituiscono le colonne della matrice B; tali vettori possono essere interpretati geometricamente nel modo che segue: indichiamo con $U_1, U_2, \ldots, U_n$ i vettori unitari dello spazio vettoriale reale ad n dimensioni; poniamo cioè:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, U_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Indichiamo poi con F l'insieme dei vettori che hanno componenti non negative. Ovviamente un vettore Y di F potrà essere sempre espresso da una formula del tipo:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, U_i; \qquad (y_i \geqslant 0). \tag{39}$$

Osserviamo ora che ognuno dei vettori (37) si può ovviamente pensare come ottenuto moltiplicando (a sinistra) per la matrice B il corrispondente vettore U_i che ha lo stesso indice. Si ha cioè, per ogni indice i:

$$V_i = BU_i \,. \tag{41}$$

In altre parole, si può considerare la matrice B come un operatore lineare il quale porta il vettore Y di F dato dalla (39) nel vettore, che indicheremo con W, dato ovviamente dalla formula:

$$W = BY = \sum_{i=1}^{n} y_i V_i \,; \qquad (y_i \geqslant 0). \tag{42}$$

Indichiamo con G l'insieme dei vettori W che si esprimono nella forma (42), cioè che sono delle combinazioni lineari a coefficienti non negativi dei vettori V_i.

Si osserva che l'insieme F è un sottoinsieme proprio dell'insieme G: infatti l'insieme F è costituito da vettori aventi componenti non negative; invece i vettori dell'insieme G possono avere delle componenti negative, come accade per esempio per i vettori V_i.

Segue di qui immediatamente la validità del seguente:

LEMMA 3. - *Condizione necessaria e sufficiente perché un vettore W sia trasformato dalla matrice B^{-1} in un vettore Y di F è che W appartenga all'insieme G.*

Con le notazioni introdotte, la formula (33) può essere scritta nella forma:

$$BY = Z(X) - \lambda' X \,. \tag{43}$$

Ponendo ora per brevità:

$$T = Z(X) - \lambda' X \,, \tag{44}$$

possiamo enunciare il

TEOREMA 1. - *Condizione necessaria e sufficiente perché la equazione* (43) *abbia come soluzione un vettore Y le cui componenti sono positive è che il vettore T sia interno all'insieme G, definito dalle* (42).

Ovviamente la condizione è soddisfatta quando sia valida la condizione (34); pertanto il teorema ora enunciato integra la discussione particolare che abbiamo esposto alla fine del precedente paragrafo.

Nasce ora il problema di esprimere in altro modo le condizioni necessarie e sufficienti che vengono prese in considerazione nell'enunciato del teorema. A tal fine indichiamo brevemente con il simbolo:

$$B_i(X) \tag{45}$$

la matrice quadrata di ordine n che si ottiene dalla matrice B, data dalla (36), sostituendo la i-esima colonna con il vettore X.

Pertanto la condizione algebrica:

$$|B_i(X)| = 0 \tag{46}$$

caratterizza i vettori X che possono essere espressi come combinazioni lineari dei vettori V_j diversi da V_i; tali vettori formano ovviamente uno spazio lineare. Pertanto la condizione che un determinato vettore X appartenga all'insieme G si può esprimere imponendo che il vettore X, rispetto ad ogni spazio lineare (46) stia dalla stessa parte del vettore V_i; facendo riferimento al significato del determinante di una matrice quadrata, la condizione perché il vettore T appartenga all'insieme G si può esprimere con le n relazioni:

$$sgn\,|B| = sgn\,|B_i(T)|\,. \tag{47}$$

§ 6. - Nel paragrafo precedente abbiamo analizzato le variazioni delle componenti di un autovettore normalizzato, soluzione dell'equazione vettoriale (14), nel caso particolare in cui gli elementi della matrice M variino secondo le leggi date dalle (15). Pertanto il vettore Y che compare nella (25) ha come componenti — ripetiamo — le derivate delle componenti del vettore X considerate come funzioni dell'unico parametro α. Si può tuttavia osservare che il metodo adottato per la discussione è valido anche in casi più generali di quello citato. Nel presente paragrafo discuteremo le variazioni del vettore X quando gli elementi b_i ed a_{1i} variino in modo indipendente tra loro.

Precisamente prenderemo in considerazione n parametri reali positivi α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, e porremo ora:

$$\bar{b}_i = b_i - \alpha_i \tag{48}$$

$$\bar{a}_{1i} = a_{1i} + \alpha_i \, .$$

Con queste posizioni potremo calcolare le derivate parziali degli elementi del vettore X rispetto a ciascuno dei parametri α_i, con un metodo analogo a quello utilizzato nel paragrafo precedente. A tal fine, fissato un indice i, possiamo porre uguali a zero tutti i valori dei parametri α_j, escluso quello che corrisponde all'indice i. Inoltre possiamo porre:

$$\bar{P}_i (X^*) = P(X) - \alpha_i X_i \tag{49}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1i} + \alpha_i \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2i} \dots\dots\dots a_{2n} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{ni} \dots\dots\dots a_{nn} \end{bmatrix} \tag{50}$$

Poniamo ancora:

$$\lambda'_i = \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_i} \tag{51}$$

per cui si avrà:

$$\bar{\lambda} = \lambda + \alpha_i \lambda'_i + [2] \tag{52}$$

dove abbiamo indicato con il simbolo [2] dei termini che sono infinitesimi di ordine almeno 2 rispetto alla quantità:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i)^2}$$

assunta come infinitesimo principale.

Analogamente si avrà:

$$\bar{X} = X + \alpha_i \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} + [2] . \tag{53}$$

Con questi simboli, e con sviluppi analoghi a quelli esposti nel paragrafo precedente, si ottiene la relazione:

$$(\lambda + \alpha_i \lambda'_i + [2]) \left(X + \alpha_i \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} + [2] \right) = \tag{54}$$

$$= c + AX + \alpha_i A \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} + \alpha_i Z_i (X)$$

nella quale abbiamo indicato con il simbolo $Z_i (X)$ il vettore che ha la sola prima componente diversa da zero, ed uguale ad X_i:

$$Z_i (X) = \begin{bmatrix} X_i \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{55}$$

Anche in questo caso, tenendo presente la (14), e passando al limite quando il parametro α_i tende a zero; si ottiene:

$$(\lambda I_n - A) \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} = Z_i \cdot (X) - \lambda'_i X . \tag{56}$$

È possibile ora svolgere delle considerazioni analoghe a quelle svolte nei paragrafi precedenti, ed applicarle alle derivate parziali degli elementi del vettore X rispetto ai parametri α_i.